

计算模态响应灵敏度的两种方法比较*

吕中荣, 徐伟华, 刘济科

(中山大学工学院应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘要: 从结构强迫振动的有限元方程出发, 用 Newmark 直接积分法和状态空间法两种不同的方法计算出结构的模态响应。进一步用两种方法推导了模态响应对应结构物理参数(如单元杨氏模量)的灵敏度。计算了模态位移、速度和加速度响应对应单元杨氏模量的灵敏度, 并且对这两种方法的计算效率和精度进行了比较。计算结果表明两者精度相当, 但状态空间法所需要的计算计时要少, 比 Newmark 法具有较高的计算效率。因此, 状态空间法更适合用于正问题分析中结构动态响应的计算。

关键词: 模态响应; 状态空间; 灵敏度

中图分类号: TB122 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2009)04-0001-04

Comparison Study on Two Methods to Calculate Modal Response Sensitivities

LÜ Zhongrong, XU Weihua, LIU Jike

(Department of Applied Mechanics and Engineering, School of Engineering,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The sensitivities of modal response with respect to structural physical parameter (i. e. elemental Young's modulus) are derived. The sensitivities of modal displacement, velocity and acceleration responses with respect to the elemental Young's modulus are derived from Newmark and State-space methods. A comparison study is carried out on calculation of the response sensitivities from these two methods. The results show that the computational time of state space method is less than that of Newmark method while the preciseness of two methods is almost the same. Thus, state-space method is more suitable for the calculation of dynamic responses in the forward analysis.

Key words: modal response; state-space; sensitivity

结构在外激励作用下动态响应的计算方法有多种, 而每种方法的准确性、计算稳定性和计算效率不尽相同^[1-3]。众所周知, Newmark 法是工程上用于计算结构的线性和非线性响应的常用方法。状态空间法相对来说则是一种较新的方法。两种方法的主要区别在于^[4]:

(a) Newmark 法是基于对二阶微分方程进行导数近似, 状态空间则是基于对离散力函数进行线性插值来计算卷积积分;

(b) 状态空间法没有对响应函数作任何假设, 因此, 该方法对系统动态特征的扭曲程度较小。

文[5-6]中利用了 Newmark 法来计算结构的物理响应以及响应灵敏度^[7]。本文利用状态空间法来计算结构的模态响应及其对杨氏模量等物理参数的灵敏度^[8]。对两种不同方法的计算效率进行了比较。结果发现状态空间法具有较高的计算效率。

* 收稿日期: 2008-09-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772202); 广东省自然科学基金资助项目(07003680); 广东省科技计划资助项目(2007B030402002); 教育部新教师基金资助项目(200805581018)

作者简介: 吕中荣(1975年生), 男, 副教授; E-mail: lvzhr@mail.sysu.edu.cn

1 利用 Newmark 法计算模态响应灵敏度

1.1 结构的模态响应

有限元法离散后的结构受迫振动微分方程可表示为

$$M\{\ddot{d}\} + C\{\dot{d}\} + K\{d\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

其中, $\{d\}$, $\{\dot{d}\}$ 和 $\{\ddot{d}\}$ 分别为节点位移向量, 速度向量和加速度向量, K 为系统刚度矩阵, M 为系统质量矩阵, C 为系统阻尼矩阵, 本文采用瑞利阻尼模型^[9], 即 $C = a_1 M + a_2 K$, a_1 和 a_2 为两常数, 它们可由模态阻尼比和模态频率求得, $\{F(t)\}$ 为节点力向量。

利用模态叠加法, 位移响应 $\{d\}$ 可以表示为

$$\{d\} = \Phi\{q\} \quad (2)$$

这里, Φ 为模态矩阵, 将方程 (2) 代入 (1), 两边左乘以 Φ^T 有,

$$\Phi^T M \Phi \{\ddot{q}\} + \Phi^T (a_1 M + a_2 K) \Phi \{\dot{q}\} + \Phi^T K \Phi \{q\} = \Phi^T \{F(t)\} \quad (3)$$

由模态正交性, 方程 (3) 化为

$$I\{\ddot{q}\} + (a_1 I + a_2 \Lambda)\{\dot{q}\} + \Lambda\{q\} = \{f(t)\} \quad (4)$$

这里, I 为单位矩阵, Λ 为对角矩阵, $\{f(t)\}$ 为模态力向量。模态位移 q , 模态速度 $\dot{q}$ 及模态加速度响应 $\ddot{q}$ 可从式 (4) 由 Newmark 直接积分法求出。

1.2 模态响应物理参数的灵敏度

方程 (3) 两边对某个物理参数, 如第 i 个单元杨氏模量 E^i 求偏导有

$$I\left\{\frac{\partial \ddot{q}}{\partial E^i}\right\} + (a_1 I + a_2 \Lambda)\left\{\frac{\partial \dot{q}}{\partial E^i}\right\} + \Lambda\left\{\frac{\partial q}{\partial E^i}\right\} = -\Phi^T \frac{\partial k_i^e}{\partial E^i} \Phi\{q\} - a_2 \Phi^T \frac{\partial K}{\partial E^i} \Phi\{\dot{q}\} \quad (i = 1, 2, \dots, NE) \quad (5)$$

这里, $\left\{\frac{\partial q}{\partial E^i}\right\}$, $\left\{\frac{\partial \dot{q}}{\partial E^i}\right\}$, $\left\{\frac{\partial \ddot{q}}{\partial E^i}\right\}$ 为模态位移, 速度和加速度响应对物理参数的灵敏度。这些灵敏度类似地可以由方程 (5) 直接积分求出。

2 利用状态空间法计算模态响应灵敏度

2.1 结构模态响应的状态空间描述

式 (4) 可以利用状态空间法写为如下一阶微分方程的形式

$$\dot{X} = K^* X + \bar{P} \quad (6)$$

其中, $X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}_{2N \times 1}$,

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & -(a_1 I + a_2 \Lambda) \end{bmatrix}_{2N \times 2N},$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

这里, X 为状态向量, 其包含模态位移和模态速度, 长度为 $2N$ 。这些微分方程可以利用指数矩阵转化为如下离散方程的形式

$$X_{j+1} = F X_j + \bar{D} \bar{P}_j \quad (7)$$

$$F = e^{K^* h} \quad (8)$$

$$\bar{D} = K^{*-1} (F - I) \quad (9)$$

其中, F 为指数矩阵, $(j+1)$ 代表第 $j+1$ 步时的计算值, h 为时间步长。由方程 (6) 得到的系统动态响应称为状态空间法。

2.2 模态响应灵敏度的状态空间法推导

式 (6) 两边对第 i 个单元杨氏模量 E^i 求偏导有

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial E^i} = K^* \frac{\partial X}{\partial E^i} + \frac{\partial K^*}{\partial E^i} X = K^* \frac{\partial X}{\partial E^i} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi^T \frac{\partial K}{\partial E^i} \Phi q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_2 \Phi^T \frac{\partial K}{\partial E^i} \Phi \dot{q} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, NE) \quad (10)$$

记 $Y = \partial X / \partial E^i$, 这里, Y 为模态位移和模态速度对物理参数 E^i 的灵敏度

$$\text{令 } \hat{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi^T \frac{\partial K}{\partial E^i} \Phi q \end{bmatrix}$$

$$\text{及 } \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_2 \Phi^T \frac{\partial K}{\partial E^i} \Phi \dot{q} \end{bmatrix}$$

式 (10) 可另写为

$$\dot{Y} = K^* Y + \hat{P} + \bar{G} \quad (10a)$$

注意式 (10a) 具有与式 (6) 相同的形式, 模态位移和模态速度灵敏度也可以由式 (10) 离散为如下求得

$$Y_{k+1} = F Y_k + \bar{D} (\hat{P}_k + \bar{G}_k) \quad (11)$$

模态加速度的灵敏度则可以由模态速度灵敏度直接求导得到。

3 数值计算

3.1 时域响应

图 1 所示为长 4 m 的单跨简支梁, 梁的参数为: 密度 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, 杨氏模量 $E = 69 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 长度 $L = 4 \text{ m}$, 宽度 $b = 0.1 \text{ m}$, 及高度 $h_0 = 0.1 \text{ m}$ 。该梁离散为 10 个欧拉-伯努利梁单

元, 每个节点 2 个自由度, 一共 22 个自由度。梁的前 5 阶固有频率分别为 14.27, 57.12, 128.93, 228.61 以及 358.55 Hz。计算强迫振动响应时, 各阶模态阻尼比均取为 0.02。假定外激励为 $f(t) = 100\sin(10\pi t)N$, 作用在离梁左端 2.4 m 的地方。计算响应的的时间步长取为 0.001 s, 持续的时间为 5 s。

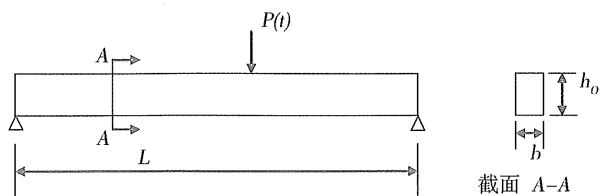


图1 简支梁模型

Fig. 1 The simply supported beam model

图2所示为利用 Newmark 法和状态空间法两种方法计算所得的一阶模态位移和模态加速度响应曲线, 所需的计算时间分别为 0.72 s 和 0.31s。由图可以看出两种方法计算出来的响应非常吻合。其中, 模态位移响应的相对差别为 0.2% 模态速度的相对差别为 0.4% 这表明两种方法几乎具有相同的计算精度, 而状态空间法所耗时较少。

3.2 模态响应的灵敏度

图3所示为用 Newmark 法和状态空间法计算所得的模态位移响应和模态加速度响应对第三个单元的抗弯刚度的灵敏度。它们计算机时分别为 2.58 s 和 1.19 s, Newmark 法的计算机时约为状态空间法的 2 倍。两种方法所得的灵敏度曲线也吻合得很好, 表明它们几乎具有相同的精度。模态位移响应灵敏度的相对差别为 0.7% 模态速度响应灵敏度的相对差别为 1.1%。

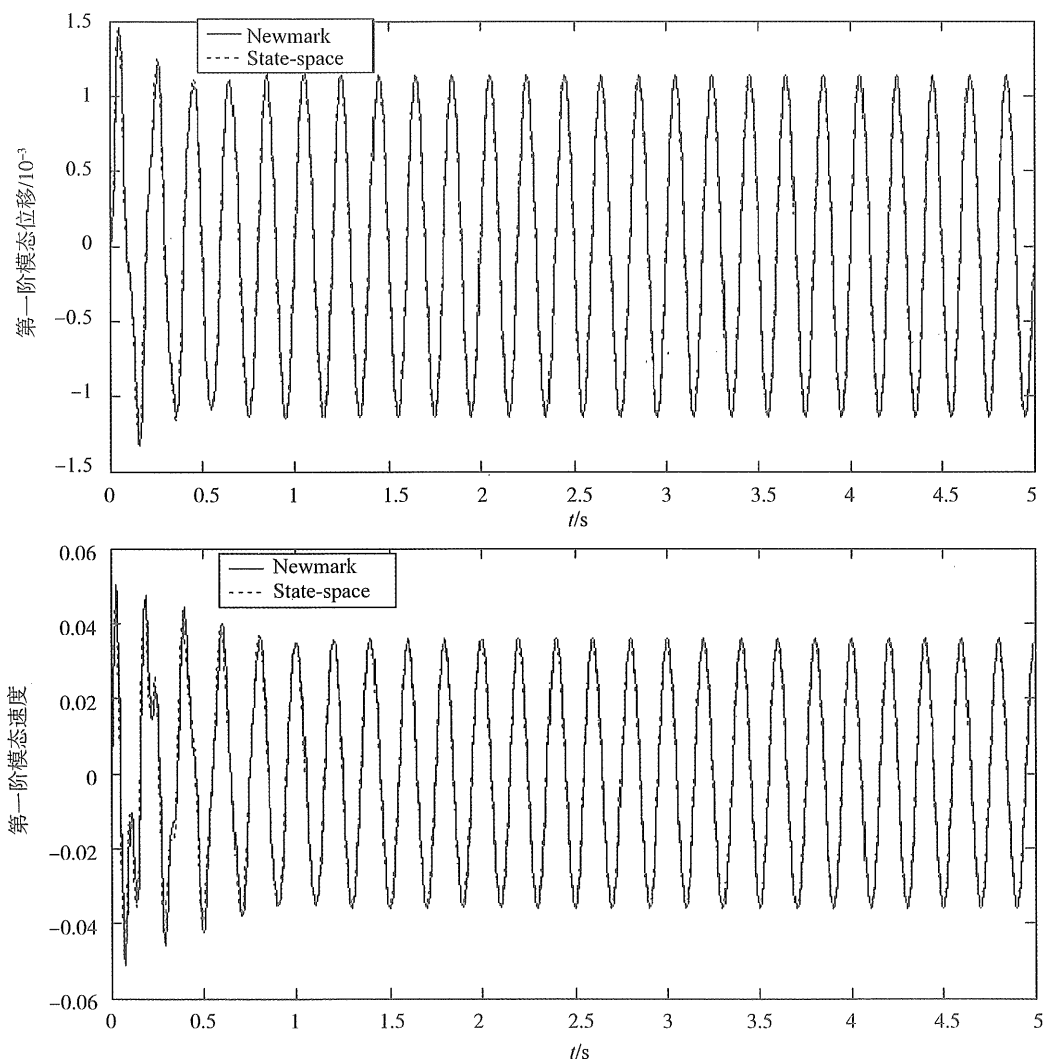


图2 第一阶模态位移和模态速度响应的比较

Fig. 2 Comparison on the first modal displacement and modal velocity

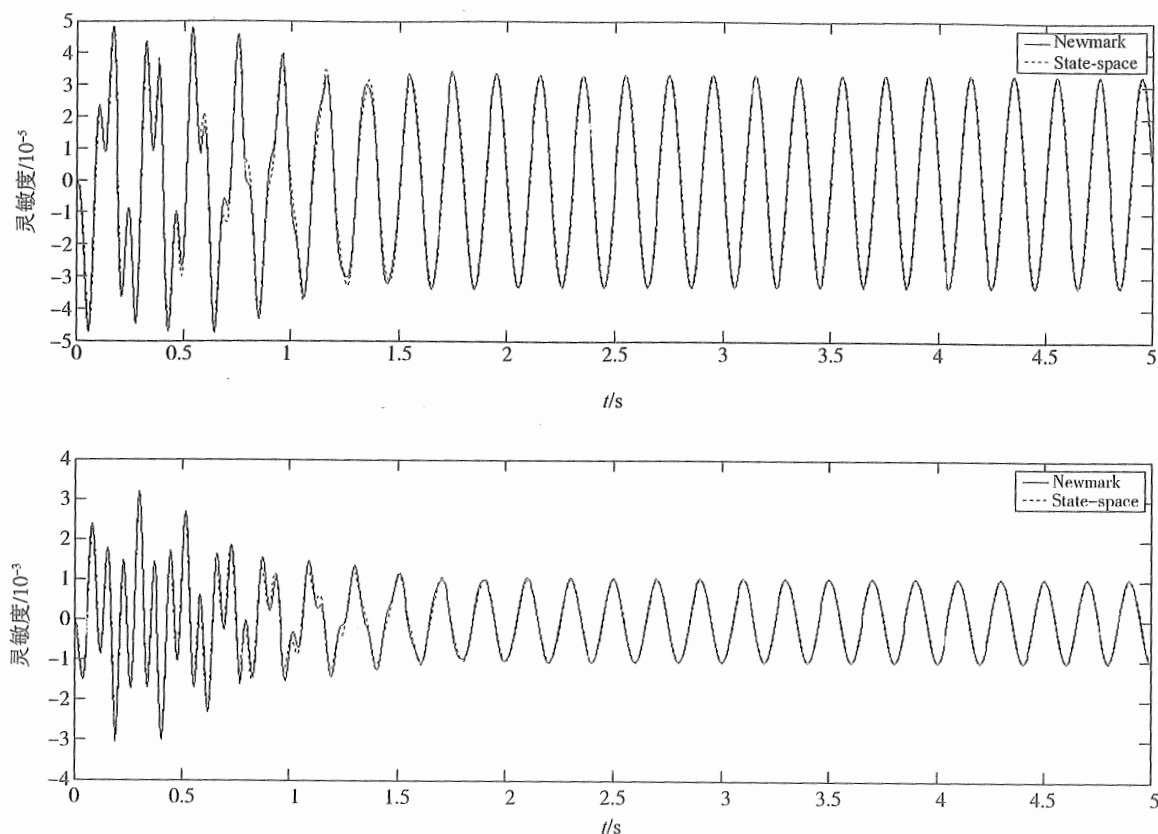


图3 第一阶模态位移和模态速度对单元杨氏模量的灵敏度比较

Fig. 3 Comparison on the first modal displacement and modal velocity sensitivity with respect to elemental Young's modulus

4 小结

本文利用 Newmark 法和状态空间法计算了结构的模态响应以及模态响应对物理参数的灵敏度,并对这两种方法的计算结果进行了比较。算例表明两种方法的计算精度相差不大,但状态空间法的所消耗的计算机时要比 Newmark 方法少,这表明状态空间法的计算效率较高。推导模态响应灵敏度的目的是将其用于结构损伤识别,限于篇幅原因,这方面的应用将另文发表。

参考文献

- [1] BATHE K J, WILSON K D. Numerical methods in finite element analysis [M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall, 1976.
- [2] RALSTON A, WILF H S. Mathematical methods for digital computers [M]. New York: Wiley, 1960.
- [3] GOUDREAU G L, TAYLOR R I. Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics [J]. Comp Meth Appl Meth Engrg, 1973(2): 69-97.
- [4] WANG Y P, LIAO W H, LEE C L. A state-space approach for dynamic analysis of sliding structures [J]. Engineering Structures, 2001, 23: 790-801.
- [5] LU Z R, LAW S S. Sensitivity of dynamic response and its application in damage detection [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 303: 306-329.
- [6] LU Z R, LAW S S. Identification of Prestress force from measured structural responses [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(8): 2186-2199.
- [7] NEWMARK N W. A method of computation for structural dynamics [J]. Journal of Engineering Mechanics Division ASCE, 1959, 85(3): 67-94.
- [8] 陈荣毅, 沈鹏程. 结构地震反应的状态空间分析法 [J]. 结构工程师, 1999(2): 36-38.
CHEN R Y, SHEN P C. State space method analysis of seismic response of structure [J]. Structural Engineers, 1999(2): 36-38.
- [9] BATHE K J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1982.